# Основания статистической механики и квантовая запутанность

О. В. Лычковский

Институт Теоретической и Экспериментальной Физики

13 мая 2010 г.

# План доклада

# Постановка задачи

Квантовая система $\mathcal{S}$ взаимодействует с квантовым резервуаром $\mathcal{B}$.

Гамильтониан: $H = H^{\mathcal{S}} + H^{\mathcal{B}} + H^{\mathcal{SB}}$.

# Постановка задачи

Квантовая система $\mathcal{S}$ взаимодействует с квантовым резервуаром $\mathcal{B}$.

Гамильтониан: $H = H^{\mathcal{S}} + H^{\mathcal{B}} + H^{\mathcal{S}\mathcal{B}}$.

Составная система $\mathcal{H} = \mathcal{S} \otimes \mathcal{B}$ замкнута. Её состояние задается вектором

$$\Psi(t) = \exp(-\mathrm{i}Ht)\Psi(0) \in \mathcal{H}.$$

# Постановка задачи

Квантовая система $\mathcal{S}$ взаимодействует с квантовым резервуаром $\mathcal{B}$.

Гамильтониан: $H = H^{\mathcal{S}} + H^{\mathcal{B}} + H^{\mathcal{SB}}$.

Составная система $\mathcal{H} = \mathcal{S} \otimes \mathcal{B}$ замкнута. Её состояние задается вектором

$$\Psi(t) = \exp(-\mathrm{i}Ht)\Psi(0) \in \mathcal{H}.$$

Резервуар $\mathcal{B}$ и система $\mathcal{S}$ открыты. Их состояния задаются матрицами плотности

$$\rho^{\mathcal{S}}(t) \equiv \mathrm{tr}_{\mathcal{B}}|\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|, \quad \rho^{\mathcal{B}}(t) \equiv \mathrm{tr}_{\mathcal{S}}|\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|.$$

# Постановка задачи

Каково поведение $\rho^{\mathcal{S}}(t)$ на больших временах? Каковы свойства усредненной по времени матрицы плотности

$$\overline{\rho^{\mathcal{S}}} \equiv \lim_{t\to\infty} t^{-1} \int_0^t \rho^{\mathcal{S}}(t')dt'?$$

# Постановка задачи

Каково поведение $\rho^{\mathcal{S}}(t)$ на больших временах? Каковы свойства усредненной по времени матрицы плотности

$$\overline{\rho^{\mathcal{S}}} \equiv \lim_{t\to\infty} t^{-1} \int_0^t \rho^{\mathcal{S}}(t')dt'?$$

Пусть начальное состояние факторизовано:

$$\Psi(0) = \psi\Phi, \ \psi \in \mathcal{S}, \ \Phi \in \mathcal{B}.$$

# Постановка задачи

"Нормальный"случай:

- $\rho^{\mathcal{S}}(t)$ с течением времени приближается к равновесному состоянию $\overline{\rho^{\mathcal{S}}}$ и большую часть времени остается близким к этому равновесному состоянию.

# Постановка задачи

"Нормальный"случай:

- $\rho^{\mathcal{S}}(t)$ с течением времени приближается к равновесному состоянию $\overline{\rho^{\mathcal{S}}}$ и большую часть времени остается близким к этому равновесному состоянию.

- $\overline{\rho^{\mathcal{S}}}$ слабо зависит от *микроскопических* характеристик начального состояния резервуара Φ. При этом, однако, оно должно зависеть от *макроскопических* характеристик резервуара, которые представляют из себя функционалы на $\mathcal{B}$ (пример – обратная температура $\beta = \beta[\Phi]$.)

# Постановка задачи

"Нормальный"случай:

- $\rho^{\mathcal{S}}(t)$ с течением времени приближается к равновесному состоянию $\overline{\rho^{\mathcal{S}}}$ и большую часть времени остается близким к этому равновесному состоянию.

- $\overline{\rho^{\mathcal{S}}}$ слабо зависит от *микроскопических* характеристик начального состояния резервуара $\Phi$. При этом, однако, оно должно зависеть от *макроскопических* характеристик резервуара, которые представляют из себя функционалы на $\mathcal{B}$ (пример – обратная температура $\beta = \beta[\Phi]$.)

- $\overline{\rho^{\mathcal{S}}}$ слабо зависит от начального состояния системы, $\psi$.

# Постановка задачи

"Нормальный"случай:

- $\rho^{\mathcal{S}}(t)$ с течением времени приближается к равновесному состоянию $\overline{\rho^{\mathcal{S}}}$ и большую часть времени остается близким к этому равновесному состоянию.
- $\overline{\rho^{\mathcal{S}}}$ слабо зависит от *микроскопических* характеристик начального состояния резервуара $\Phi$. При этом, однако, оно должно зависеть от *макроскопических* характеристик резервуара, которые представляют из себя функционалы на $\mathcal{B}$ (пример – обратная температура $\beta = \beta[\Phi]$.)
- $\overline{\rho^{\mathcal{S}}}$ слабо зависит от начального состояния системы, $\psi$.
- $\overline{\rho^{\mathcal{S}}} = Z^{-1} \exp(-\beta H^{\mathcal{S}})$ (распределением Гиббса) в случае слабого взаимодействия и малой дисперсии энергии начального состояния

# Содержание

# План доклада

# Соглашения и обозначения

Конечномерность пространств состояний:

$$d_{\mathcal{S}} = \dim \mathcal{S} < \infty, \quad d_{\mathcal{B}} = \dim \mathcal{B} < \infty, \quad d \equiv d_{\mathcal{S}} d_{\mathcal{B}}$$

$$d_{\mathcal{S}} \ll d_{\mathcal{B}}$$

# Соглашения и обозначения

Конечномерность пространств состояний:

$$d_{\mathcal{S}} = \dim \mathcal{S} < \infty, \quad d_{\mathcal{B}} = \dim \mathcal{B} < \infty, \quad d \equiv d_{\mathcal{S}} d_{\mathcal{B}}$$

$$d_{\mathcal{S}} \ll d_{\mathcal{B}}$$

Усреднение по времени: $\overline{X} \equiv \lim\limits_{t\to\infty} t^{-1} \int_0^t X(t')dt'$.

Усреднение по множеству $M$ векторов состояний:
$\langle Y \rangle_{\Psi \in M} \equiv \int\limits_M Y(\Psi) d\Psi$.

# Эволюция $\rho^{\mathcal{S}}(t)$

$$H = \sum_{n=1}^{d} E_n |\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|$$

Спектр предполагается невырожденным.

# Эволюция $\rho^{\mathcal{S}}(t)$

$$H = \sum_{n=1}^{d} E_n |\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|$$

Спектр предполагается невырожденным.

$$\Psi(0) = \sum_{n=1}^{d} c_n \Psi_n.$$

$$\rho^{\mathcal{S}}(t) = \sum_{n=1}^{d}\sum_{m=1}^{d} c_n c_m^* e^{-\mathrm{i}(E_n - E_m)t} \rho^{\mathcal{S}}_{nm},$$

$$\rho^{\mathcal{S}}_{nm} \equiv \mathrm{tr}_{\mathcal{B}} |\Psi_n\rangle\langle\Psi_m|$$

# Эволюция $\rho^{\mathcal{S}}(t)$

$$H = \sum_{n=1}^{d} E_n |\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|$$

Спектр предполагается невырожденным.

$$\Psi(0) = \sum_{n=1}^{d} c_n \Psi_n.$$

$$\rho^{\mathcal{S}}(t) = \sum_{n=1}^{d} \sum_{m=1}^{d} c_n c_m^* e^{-\mathrm{i}(E_n - E_m)t} \rho_{nm}^{\mathcal{S}},$$

$$\rho_{nm}^{\mathcal{S}} \equiv \mathrm{tr}_{\mathcal{B}} |\Psi_n\rangle\langle\Psi_m|$$

$$\overline{\rho^{\mathcal{S}}} = \sum_{n=1}^{d} |c_n|^2 \rho_n^{\mathcal{S}}, \quad \rho_n^{\mathcal{S}} \equiv \rho_{nn}^{\mathcal{S}}$$

# Квантовая запутанность

## Теорема Шмидта

$$\Psi = \sum_{k=1}^{d_S} \lambda_k \psi_k \Phi_k,$$

причем $\{\psi_k\}$ и $\{\Phi_k\}$ -ортонормированные системы векторов.

# Квантовая запутанность

## Теорема Шмидта

$$\Psi = \sum_{k=1}^{d_{\mathcal{S}}} \lambda_k \psi_k \Phi_k,$$

причем $\{\psi_k\}$ и $\{\Phi_k\}$ -ортонормированные системы векторов.

## Purity:

$$\mathfrak{P}(\Psi) \equiv \mathrm{tr}_{\mathcal{S}}(\rho^{\mathcal{S}})^2 = \sum_{k=1}^{d_{\mathcal{S}}} |\lambda_k|^4$$

$$1/d_{\mathcal{S}} \leq \mathfrak{P}(\Psi) \leq 1$$

# Квантовая запутанность

## Теорема Шмидта

$$\Psi = \sum_{k=1}^{d_{\mathcal{S}}} \lambda_k \psi_k \Phi_k,$$

причем $\{\psi_k\}$ и $\{\Phi_k\}$ -ортонормированные системы векторов.

## Purity:

$$\mathfrak{P}(\Psi) \equiv \mathrm{tr}_{\mathcal{S}}(\rho^{\mathcal{S}})^2 = \sum_{k=1}^{d_{\mathcal{S}}} |\lambda_k|^4$$

$$1/d_{\mathcal{S}} \leq \mathfrak{P}(\Psi) \leq 1$$

$1 - \mathfrak{P}(\Psi)$ - мера запутанности вектора $\Psi$.

# Eigenstate Thermalisation Hypothesis (ETH)

**Гипотеза (Deutsch, 1991; Sredniki, 1994; Rigol, Dunjko, Olshanii, 2007).**

Для реалистических гамильтонианов с сравнительно слабым взаимодействием

$$\rho_n^{\mathcal{S}} \simeq Z^{-1} \exp(-\beta_n H^{\mathcal{S}}),$$

где $\beta_n = \frac{d \ln r}{dE}\Big|_{E=E_n}$, $r(E)$ – сглаженная плотность уровней.

# Eigenstate Thermalisation Hypothesis (ETH)

**Гипотеза (Deutsch, 1991; Sredniki, 1994; Rigol, Dunjko, Olshanii, 2007).**

Для реалистических гамильтонианов с сравнительно слабым взаимодействием

$$\rho_n^{\mathcal{S}} \simeq Z^{-1} \exp(-\beta_n H^{\mathcal{S}}),$$

где $\beta_n = \frac{d \ln r}{dE}\Big|_{E=E_n}$, $r(E)$ – сглаженная плотность уровней.

Если гипотеза верна, и дисперсия энергии начального состояния мала, то все привычные аспекты термализации гарантированы.

# Eigenstate Thermalisation Hypothesis (ETH)

**Гипотеза (Deutsch, 1991; Sredniki, 1994; Rigol, Dunjko, Olshanii, 2007).**

Для реалистических гамильтонианов с сравнительно слабым взаимодействием

$$\rho_n^{\mathcal{S}} \simeq Z^{-1} \exp(-\beta_n H^{\mathcal{S}}),$$

где $\beta_n = \left.\frac{d \ln r}{dE}\right|_{E=E_n}$, $r(E)$ – сглаженная плотность уровней.

Если гипотеза верна, и дисперсия энергии начального состояния мала, то все привычные аспекты термализации гарантированы.

Гипотеза проверена для нескольких моделей. Известны и контрпримеры. В дальнейшем мы не будем ее использовать и обсуждать

# Норма и метрика в пространстве состояний

## Норма эрмитового оператора $A$:

$$||A|| \equiv \mathrm{tr}\sqrt{A^2} = \sum_k |a_k|$$

# Норма и метрика в пространстве состояний

**Норма эрмитового оператора $A$:**

$||A|| \equiv \mathrm{tr}\sqrt{A^2} = \sum_k |a_k|$

**Расстояние между состояниями $\rho_1$ и $\rho_2$:**

$||\rho_1 - \rho_2||$

# Норма и метрика в пространстве состояний

**Норма эрмитового оператора $A$:**

$||A|| \equiv \mathrm{tr}\sqrt{A^2} = \sum_k |a_k|$

**Расстояние между состояниями $\rho_1$ и $\rho_2$:**

$||\rho_1 - \rho_2||$

**Свойства метрики**

- $||\rho_1 - \rho_2|| \leq 2$
- $\frac{1}{2}||\rho_1 - \rho_2||$ равно максимальной разности вероятностей любых двух исходов любого измерения;
- $\sup_A(\mathrm{tr}\rho_1 A - \mathrm{tr}\rho_2 A) = \frac{1}{2}(a_{max} - a_{min})||\rho_1 - \rho_2||$.

# Равномерная мера в $\mathcal{H}_R$

$\mathcal{H}_R$ – линейное подпространство в $\mathcal{H}$.

# Равномерная мера в $\mathcal{H}_R$

$\mathcal{H}_R$ – линейное подпространство в $\mathcal{H}$.

$$\Psi = \sum_{l=1}^{d_R} c_l \Psi_l, \text{ где } \{\Psi_l\} \; - \; \text{о.н.б. в } \mathcal{H}_R$$

# Равномерная мера в $\mathcal{H}_R$

$\mathcal{H}_R$ – линейное подпространство в $\mathcal{H}$.

$$\Psi = \sum_{l=1}^{d_R} c_l \Psi_l, \text{ где } \{\Psi_l\} \ - \ \text{о.н.б. в } \mathcal{H}_R$$

$$x_{2l-1} = \mathrm{Re}\ c_l,\ x_{2l} = \mathrm{Im}\ c_l,\ x = (x_1, \ldots, x_{2d_R}) \in \mathbb{R}^{2d_R}$$

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = 1 \ \Rightarrow \sum_{j=1}^{2d_R} x_j^2 = 1 \ - \ \text{сфера } \mathbb{S}^{2d_R-1}, \text{ вложенная в } \mathbb{R}^{2d_R}$$

# Равномерная мера в $\mathcal{H}_R$

$\mathcal{H}_R$ – линейное подпространство в $\mathcal{H}$.

$$\Psi = \sum_{l=1}^{d_R} c_l \Psi_l, \text{ где } \{\Psi_l\} \ - \text{ о.н.б. в } \mathcal{H}_R$$

$$x_{2l-1} = \mathrm{Re}\ c_l,\ x_{2l} = \mathrm{Im}\ c_l,\ x = (x_1, ..., x_{2d_R}) \in \mathbb{R}^{2d_R}$$

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = 1 \ \Rightarrow \sum_{j=1}^{2d_R} x_j^2 = 1 \ - \text{ сфера } \mathbb{S}^{2d_R - 1}, \text{ вложенная в } \mathbb{R}^{2d_R}$$

$$x \to |\Psi\rangle\langle\Psi|$$

Равномерная нормированная мера на $\mathbb{S}$ $\quad\to\quad$ Равномерная нормированная мера на $\mathcal{H}_R$ (не зависит от выбора базиса $\{\Psi_l\}$)

# План доклада

## Лемма Леви.

Пусть функция $f(x)$ задана на сфере $\mathbb{S}^{2d-1}$, вложенной в $\mathbb{R}^{2d}$. Пусть константа Липшица этой функции ограничена,

$$\sup_{x,x' \in \mathbb{S}^{2d-1}} |f(x) - f(x')|/||x - x'|| < \xi < \infty,$$

где $||...||$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^{2d}$. Тогда

$$\mu\{x : |f(x) - \langle f(x)\rangle_{x\in\mathbb{S}^{2d-1}}| > \epsilon\} < 2e^{-4Cd_R\epsilon^2/\xi^2}, \;\; C \equiv 1/(18\pi^3),$$

где $\mu$ – равномерная нормированная мера на $\mathbb{S}^{2d-1}$.

## Лемма Леви.

Пусть функция $f(x)$ задана на сфере $\mathbb{S}^{2d-1}$, вложенной в $\mathbb{R}^{2d}$. Пусть константа Липшица этой функции ограничена,

$$\sup_{x,x'\in\mathbb{S}^{2d-1}} |f(x)-f(x')|/||x-x'|| < \xi < \infty,$$

где $||...||$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^{2d}$. Тогда

$$\mu\{x : |f(x) - \langle f(x)\rangle_{x\in\mathbb{S}^{2d-1}}| > \epsilon\} < 2e^{-4Cd_R\epsilon^2/\xi^2},\ C \equiv 1/(18\pi^3),$$

где $\mu$ – равномерная нормированная мера на $\mathbb{S}^{2d-1}$.

Таким образом, для подавляющего большинства векторов $x$ значение $f(x)$ почти не отличается от среднего $\langle f(x)\rangle$.

## Лемма Леви.

Пусть функция $f(x)$ задана на сфере $\mathbb{S}^{2d-1}$, вложенной в $\mathbb{R}^{2d}$. Пусть константа Липшица этой функции ограничена,

$$\sup_{x,x' \in \mathbb{S}^{2d-1}} |f(x) - f(x')|/||x - x'|| < \xi < \infty,$$

где $||...||$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^{2d}$. Тогда

$$\mu\{x : |f(x) - \langle f(x)\rangle_{x\in\mathbb{S}^{2d-1}}| > \epsilon\} < 2e^{-4Cd_R\epsilon^2/\xi^2}, \;\; C \equiv 1/(18\pi^3),$$

где $\mu$ – равномерная нормированная мера на $\mathbb{S}^{2d-1}$.

Таким образом, для подавляющего большинства векторов $x$ значение $f(x)$ почти не отличается от среднего $\langle f(x)\rangle$.

Лемму Леви можно использовать для обоснования многих вероятностных положений статистической механики.

# $\eta$-почти все $\Psi \in \mathcal{H}_R$

**Определение.**

Свойство X верно для $\eta$-почти всех $\Psi \in \mathcal{H}_R$, когда оно верно на всем $\mathcal{H}_R$ за исключением множества с мерой, не превышающей $\eta$.

# Вероятностная аргументация

## Теорема 1 (Popescu *et al.*, 2005).

Для подавляющего большинства векторов $\Psi \in \mathcal{H}_R$ матрица плотности $\rho^{\mathcal{S}} = \mathrm{tr}_{\mathcal{B}} |\Psi\rangle\langle\Psi|$ почти не отличима от усредненной матрицы плотности $\rho^{\mathcal{S}}_{\mathcal{H}_R} \equiv \langle \rho^{\mathcal{S}} \rangle_{\Psi \in \mathcal{H}_R} = d_R^{-1} \mathrm{tr}_{\mathcal{B}} \mathbf{1}_{\mathcal{H}_R}$, при условии что $d_{\mathcal{S}} \ll d_R$. Точнее,
(i)

$$\langle || \rho^{\mathcal{S}} - \rho^{\mathcal{S}}_{\mathcal{H}_R} || \rangle_{\Psi \in \mathcal{H}_R} \leq \sqrt{d_{\mathcal{S}} \cdot \mathrm{tr}_{\mathcal{B}} \left( \langle \rho^{\mathcal{B}} \rangle_{\Psi \in \mathcal{H}_R} \right)^2} \leq \frac{d_{\mathcal{S}}}{\sqrt{d_R}}$$

(ii) Для $\eta$-почти всех $\Psi \in \mathcal{H}_R$

$$|| \rho^{\mathcal{S}} - \rho^{\mathcal{S}}_{\mathcal{H}_R} || < \frac{d_{\mathcal{S}}}{\sqrt{d_R}} + \epsilon,$$

где $\eta = 2e^{-c d_R \epsilon^2}$, $c \equiv 1/(18\pi^3)$.

# Вероятностная аргументация

## Теорема 1 (Popescu *et al.*, 2005).

Для подавляющего большинства векторов $\Psi \in \mathcal{H}_R$ матрица плотности $\rho^{\mathcal{S}} = \mathrm{tr}_{\mathcal{B}} |\Psi\rangle\langle\Psi|$ почти не отличима от усредненной матрицы плотности $\rho^{\mathcal{S}}_{\mathcal{H}_R} \equiv \langle \rho^{\mathcal{S}} \rangle_{\Psi \in \mathcal{H}_R} = d_R^{-1} \mathrm{tr}_{\mathcal{B}} \mathbf{1}_{\mathcal{H}_R}$, при условии что $d_{\mathcal{S}} \ll d_R$. Точнее,
(i)

$$\langle || \rho^{\mathcal{S}} - \rho^{\mathcal{S}}_{\mathcal{H}_R} || \rangle_{\Psi \in \mathcal{H}_R} \le \sqrt{d_{\mathcal{S}} \cdot \mathrm{tr}_{\mathcal{B}} \left( \langle \rho^{\mathcal{B}} \rangle_{\Psi \in \mathcal{H}_R} \right)^2} \le \frac{d_{\mathcal{S}}}{\sqrt{d_R}}$$

(ii) Для $\eta$-почти всех $\Psi \in \mathcal{H}_R$

$$|| \rho^{\mathcal{S}} - \rho^{\mathcal{S}}_{\mathcal{H}_R} || < \frac{d_{\mathcal{S}}}{\sqrt{d_R}} + \epsilon,$$

где $\eta = 2 e^{-c d_R \epsilon^2}$, $c \equiv 1/(18\pi^3)$.

К Теореме 1 следует относится с осторожностью. Так, она формально приложима и к системам без взаимодействия, в которых термализации заведомо нет.

# План доклада

# Невырожденность частот.

**Определение.**

Гамильтониан имеет спектр с невырожденными частотами, если равенство $E_k - E_l = E_m - E_n$ имеет место только тогда, когда либо $k = l,\ m = n$, либо $k = m,\ l = n$.

# Невырожденность частот.

**Определение.**

Гамильтониан имеет спектр с невырожденными частотами, если равенство $E_k - E_l = E_m - E_n$ имеет место только тогда, когда либо $k = l, \ m = n$, либо $k = m, \ l = n$.

Невырожденность частот подразумевает, в частности, что

- спектр невырожден;
- взаимодействие не равно нулю (т.е. гамильтониан не может быть представлен в виде $H = H^{\mathcal{S}} + H^{\mathcal{B}}$).

# Условие релаксации к равновесному состоянию

**Теорема 2 (Linden *et al.*, 2008).**

Пусть гамильтониан составной системы имеет спектр с невырожденными частотами. Тогда

$$\overline{\|\rho^{\mathcal{S}}(t) - \overline{\rho^{\mathcal{S}}}\|} \le \sqrt{d_{\mathcal{S}} \mathrm{tr}_{\mathcal{B}} (\overline{\rho^{\mathcal{B}}})^2} \le d_{\mathcal{S}} \sqrt{\mathrm{tr}(\bar{\rho})^2},$$

где $\bar{\rho} \equiv \overline{|\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|} = \sum_{n=1}^{d} |c_n|^2 |\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|$.

# Условие релаксации к равновесному состоянию

**Теорема 2 (Linden *et al.*, 2008).**

Пусть гамильтониан составной системы имеет спектр с невырожденными частотами. Тогда

$$\overline{||\rho^{\mathcal{S}}(t) - \overline{\rho^{\mathcal{S}}}||} \leq \sqrt{d_{\mathcal{S}} \mathrm{tr}_{\mathcal{B}} (\overline{\rho^{\mathcal{B}}})^2} \leq d_{\mathcal{S}} \sqrt{\mathrm{tr}(\bar{\rho})^2},$$

где $\bar{\rho} \equiv \overline{|\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|} = \sum_{n=1}^{d} |c_n|^2 |\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|$.

Заметим, что доля времени, в течение которого $||\rho^{\mathcal{S}}(t) - \overline{\rho^{\mathcal{S}}}|| > K \overline{||\rho^{\mathcal{S}}(t) - \overline{\rho^{\mathcal{S}}}||}$, не превышает $1/K$.

# Условие релаксации к равновесному состоянию

## Теорема 2 (Linden *et al.*, 2008).

Пусть гамильтониан составной системы имеет спектр с невырожденными частотами. Тогда

$$\overline{||\rho^{\mathcal{S}}(t) - \overline{\rho^{\mathcal{S}}}||} \leq \sqrt{d_{\mathcal{S}} \mathrm{tr}_{\mathcal{B}} (\overline{\rho^{\mathcal{B}}})^2} \leq d_{\mathcal{S}} \sqrt{\mathrm{tr}(\bar{\rho})^2},$$

где $\bar{\rho} \equiv \overline{|\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|} = \sum_{n=1}^{d} |c_n|^2 |\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|$.

Заметим, что доля времени, в течение которого $||\rho^{\mathcal{S}}(t) - \overline{\rho^{\mathcal{S}}}|| > K \overline{||\rho^{\mathcal{S}}(t) - \overline{\rho^{\mathcal{S}}}||}$, не превышает $1/K$.

Теорема 2 оправдывает использование среднего по времени в качестве равновесной матрицы плотности.

# Типичное значение $\mathfrak{P}(\bar\rho)$

**Теорема 3 (Linden *et al.*, 2008).**

Для подавляющего большинства *начальных* состояний $\Psi(0) \in \mathcal{H}_R$ величина $\mathfrak{P}(\bar\rho) = \mathrm{tr}(\bar\rho)^2$ мала. Точнее,
(i)

$$\left\langle \mathrm{tr}(\bar\rho)^2 \right\rangle_{\Psi(0)\in\mathcal{H}_R} \le 2/d_R;$$

(ii) для $\eta$-почти всех $\Psi(0) \in \mathcal{H}_R$

$$\mathrm{tr}(\bar\rho)^2 \le 4/d_R,$$

где $\eta = 2e^{-\tilde c\sqrt{d_R}}$, $\tilde c \equiv (\ln 2)^2/(72\pi^3)$.

# План доклада

## Теорема 4 (Linden *et al.*, 2008).

Пусть гамильтониан составной системы невырожден. Фиксируем начальное состояние системы $\psi \in \mathcal{S}$. Для подавляющего большинства начальных состояний резервуара $\Phi$, лежащих в большом подпространстве $\mathcal{B}_R \subset \mathcal{B}$, усредненная по времени матрица плотности $\overline{\rho^{\mathcal{S}}}$ почти не зависит от начального состояния. Точнее,

(i)

$$\left\langle || \overline{\rho^{\mathcal{S}}} - \langle \overline{\rho^{\mathcal{S}}} \rangle_{\Phi \in \mathcal{B}_R} || \right\rangle_{\Phi \in \mathcal{B}_R} \leq \sqrt{\frac{d_S}{d_R}};$$

(ii) для $\eta$-почти всех $\Phi \in \mathcal{B}_R$

$$|| \overline{\rho^{\mathcal{S}}} - \langle \overline{\rho^{\mathcal{S}}} \rangle_{\Phi \in \mathcal{B}_R} || < \sqrt{\frac{d_S}{d_R}} + \epsilon,$$

где $\eta = 2e^{-cd_R\epsilon^2}$, $c \equiv 1/(18\pi^3)$.

# План доклада

## Теорема 5 (Linden *et al.*, 2008).

Пусть гамильтониан составной системы невырожден. Фиксируем начальное состояние резервуара $\Phi \in \mathcal{B}$. Тогда
(i)

$$\left\langle ||\overline{\rho^{\mathcal{S}}} - \langle\overline{\rho^{\mathcal{S}}}\rangle_{\psi\in\mathcal{S}}||\right\rangle_{\psi\in\mathcal{S}} \leq \sqrt{\delta},$$

где

$$\delta \equiv \sum_{n=1}^{d}\langle\Psi_n|(d_R)^{-1}\mathbf{1}_{\mathcal{H}_R}|\Psi_n\rangle\ \mathrm{tr}_{\mathcal{S}}(\rho_n^{\mathcal{S}})^2,$$

$\mathbf{1}_{\mathcal{H}_R}$ – проектор на $\mathcal{S}\otimes\Phi$;
(ii) для $\eta$-почти всех $\psi\in\mathcal{S}$

$$||\overline{\rho^{\mathcal{S}}} - \langle\overline{\rho^{\mathcal{S}}}\rangle_{\psi\in\mathcal{S}}|| < \sqrt{\delta}+\epsilon,$$

где $\eta = 2e^{-cd_{\mathcal{S}}\epsilon^2}$, $c \equiv 1/(18\pi^3)$.

## Теорема 5 (Linden *et al.*, 2008).

Пусть гамильтониан составной системы невырожден. Фиксируем начальное состояние резервуара $\Phi \in \mathcal{B}$. Тогда
(i)

$$\left\langle ||\overline{\rho^{\mathcal{S}}} - \langle\overline{\rho^{\mathcal{S}}}\rangle_{\psi\in\mathcal{S}}||\right\rangle_{\psi\in\mathcal{S}} \leq \sqrt{\delta},$$

где

$$\delta \equiv \sum_{n=1}^{d} \langle\Psi_n|(d_R)^{-1}\mathbf{1}_{\mathcal{H}_R}|\Psi_n\rangle \ \mathrm{tr}_{\mathcal{S}}(\rho_n^{\mathcal{S}})^2,$$

$\mathbf{1}_{\mathcal{H}_R}$ – проектор на $\mathcal{S} \otimes \Phi$;
(ii) для $\eta$-почти всех $\psi \in \mathcal{S}$

$$||\overline{\rho^{\mathcal{S}}} - \langle\overline{\rho^{\mathcal{S}}}\rangle_{\psi\in\mathcal{S}}|| < \sqrt{\delta} + \epsilon,$$

где $\eta = 2e^{-cd_{\mathcal{S}}\epsilon^2}$, $c \equiv 1/(18\pi^3)$.

Заметим, что $1/d_{\mathcal{S}} \leq \delta \leq 1$.

# Зависимость от начального состояния системы

Теорема 5 гарантирует, что $\overline{\rho^{\mathcal{S}}}$ почти не зависит от начального состояния системы для подавляющго большинства начальных $\psi \in \mathcal{S}$, при следующих условиях:

$$\sqrt{d_{\mathcal{S}}} \gg 1,$$

$$\sqrt{\delta} \ll 1.$$

# Зависимость от начального состояния системы

Теорема 5 гарантирует, что $\overline{\rho^{\mathcal{S}}}$ почти не зависит от начального состояния системы для подавляющго большинства начальных $\psi \in \mathcal{S}$, при следующих условиях:

$$\sqrt{d_{\mathcal{S}}} \gg 1,$$

$$\sqrt{\delta} \ll 1.$$

Последнее возможно, только если велика степень квантовой запутанности большинства $\Psi_n$:

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{S}}(\rho_n^{\mathcal{S}})^2 \ll 1$$

.

# Зависимость от начального состояния системы

Теорема 5 бесполезна, когда $d_{\mathcal{S}}$ мало.

# Зависимость от начального состояния системы

Теорема 5 бесполезна, когда $d_{\mathcal{S}}$ мало.

Предельный случай ($d_{\mathcal{S}} = 2$): система $\mathcal{S}$ = единственный спин $\frac{1}{2}$.

Удается доказать *необходимое условие* независимости $\overline{\rho^{\mathcal{S}}}$ от начального состояния системы.

# Зависимость от начального состояния системы

Теорема 5 бесполезна, когда $d_{\mathcal{S}}$ мало.

Предельный случай ($d_{\mathcal{S}} = 2$): система $\mathcal{S}$ = единственный спин $\frac{1}{2}$.

Удается доказать *необходимое условие* независимости $\overline{\rho^{\mathcal{S}}}$ от начального состояния системы.

## Определение

$\overline{\rho^{\mathcal{S}}}$ не зависит от начального состояния системы $\psi \in \mathcal{S}$ при фиксированном состоянии резервуара $\Phi \in \mathcal{B}$ с точностью $\epsilon$ если для любого $\psi$

$$\left|\left| \; \overline{\rho^{\mathcal{S}}} - \langle \overline{\rho^{\mathcal{S}}} \rangle_{\psi \in \mathcal{S}} \; \right|\right| < \epsilon.$$

## Теорема 6 (Lychkovskiy, 2010).

Пусть система $\mathcal{S}$ состоит из единственного спина $\frac{1}{2}$, и гамильтониан составной системы невырожден. Предположим, что $\overline{\rho^{\mathcal{S}}}$ не зависит от начального состояния спина с точностью $\epsilon$ для всех начальных состяний резервуара, принадлежащих подмножеству $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$ (возможно, экспоненциально малому). Тогда

$$\frac{1}{d}\sum_{n=1}^{d} \mathbf{p}_n^2 < 3\left(\epsilon + 2\sqrt{\frac{d_{\mathcal{S}}}{d_{\mathcal{B}}}} + \frac{2}{\sqrt[3]{d_{\mathcal{B}}}} + \frac{8}{p} e^{-c\sqrt[3]{d_{\mathcal{B}}}}\right), \quad c = 1/(18\pi^3).$$

Здесь $\mathbf{p}_n \equiv \mathrm{tr}_{\mathcal{S}}(\rho_n^{\mathcal{S}} \boldsymbol{\sigma})$ – поляризационные векторы матриц $\rho_n^{\mathcal{S}}$, а $p = \mu(\mathcal{F})/\mu(\mathcal{B})$ – относительная мера подмножества $\mathcal{F}$.

Заметим, что $\mathfrak{P}(\rho_n^{\mathcal{S}}) = (1 + \mathbf{p}_n^2)/2$. Малость $\frac{1}{d}\sum_{n=1}^{d} \mathbf{p}_n^2$ сигнализирует о запутанности собственных векторов полного гамильтониана $H$.

# Зависимость от начального состояния системы - простой пример

## Модель:

$$H = \frac{\omega}{2}\sigma_z + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=x,y,z}\sigma_\alpha V_\alpha + H^{\mathcal{B}},$$

$$[V_\alpha, V_\beta] = 0, \quad [V_\alpha, H^{\mathcal{B}}] = 0 \qquad .$$

# Зависимость от начального состояния системы - простой пример

## Модель:

$$H = \frac{\omega}{2}\sigma_z + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=x,y,z}\sigma_\alpha V_\alpha + H^{\mathcal{B}},$$

$$[V_\alpha, V_\beta] = 0, \quad [V_\alpha, H^{\mathcal{B}}] = 0 \qquad .$$

Заметим, однако, что

$$[H^{\mathcal{S}}, H^{\mathcal{SB}}] = (\mathrm{i}/2)(\sigma_y V_x - \sigma_x V_y) \neq 0,$$

так что энергия спина не является интегралом движения.

# Зависимость от начального состояния системы - простой пример

## Модель:

$$H = \frac{\omega}{2}\sigma_z + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=x,y,z}\sigma_\alpha V_\alpha + H^{\mathcal{B}},$$

$$[V_\alpha, V_\beta] = 0, \quad [V_\alpha, H^{\mathcal{B}}] = 0 \qquad .$$

Заметим, однако, что

$$[H^{\mathcal{S}}, H^{\mathcal{SB}}] = (\mathrm{i}/2)(\sigma_y V_x - \sigma_x V_y) \neq 0,$$

так что энергия спина не является интегралом движения.

$$\Psi_{l\pm} = \psi_{l\pm}\Phi_l, \quad E_{l\pm} = E_l^{\mathcal{B}} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\omega + v_{lz})^2 + v_{lx}^2 + v_{ly}^2},$$

где $\psi_{l\pm}$ – два собственных вектора матрицы $(\omega\sigma_z + \mathbf{v}_l\boldsymbol{\sigma})$.

# Зависимость от начального состояния системы - простой пример

Все собственные состояния $\mathcal{H}$ факторизованы, поэтому $|\mathbf{p}_n^2| = 1$.

# Зависимость от начального состояния системы - простой пример

Все собственные состояния $\mathcal{H}$ факторизованы, поэтому $|\mathbf{p}_n^2| = 1$.

В соответствии с Теоремой 6, для подавляющего большинства начальнх состояний резервуара равновесное состояние $\overline{\rho^{\mathcal{S}}}$ не может быть независимым от начального состояния системы с точностью лучшей, чем $1/3$.

# План доклада

# Квантовая почти-эргодичность

## Определение.

Подпространство $\mathcal{H}^0_{\mathrm{mc}} \subset \mathcal{H}$, микроканоническое относительно *невозмущенного* гамильтониана $H^0 \equiv H^{\mathcal{S}} + H^{\mathcal{B}}$, – линейная оболочка $d_{\mathrm{mc}}$ собственных векторов $H^0$, соответствующих последовательным собственным значениям.

# Квантовая почти-эргодичность

**Определение.**

Подпространство $\mathcal{H}^0_{\mathrm{mc}} \subset \mathcal{H}$, микроканоническое относительно *невозмущенного* гамильтониана $H^0 \equiv H^{\mathcal{S}} + H^{\mathcal{B}}$, – линейная оболочка $d_{\mathrm{mc}}$ собственных векторов $H^0$, соответствующих последовательным собственным значениям.

**Определение.**

Подпространство $\mathcal{H}_{\mathrm{mc}} \subset \mathcal{H}$, микроканоническое относительно *полного* гамильтониана $H \equiv H^{\mathcal{S}} + H^{\mathcal{B}} + H^{\mathcal{S}\mathcal{B}}$, – линейная оболочка $d_{\mathrm{mc}}$ собственных векторов $H$, соответствующих последовательным собственным значениям.

# Квантовая почти-эргодичность

## Определение.

Подпространство $\mathcal{H}^0_{\mathrm{mc}} \subset \mathcal{H}$, микроканоническое относительно *невозмущенного* гамильтониана $H^0 \equiv H^{\mathcal{S}} + H^{\mathcal{B}}$, – линейная оболочка $d_{\mathrm{mc}}$ собственных векторов $H^0$, соответствующих последовательным собственным значениям.

## Определение.

Подпространство $\mathcal{H}_{\mathrm{mc}} \subset \mathcal{H}$, микроканоническое относительно *полного* гамильтониана $H \equiv H^{\mathcal{S}} + H^{\mathcal{B}} + H^{\mathcal{S}\mathcal{B}}$, – линейная оболочка $d_{\mathrm{mc}}$ собственных векторов $H$, соответствующих последовательным собственным значениям.

## Свойства $\mathcal{H}^0_{\mathrm{mc}}$ :

# Квантовая почти-эргодичность

## Определение.

Подпространство $\mathcal{H}^0_{\rm mc} \subset \mathcal{H}$, микроканоническое относительно *невозмущенного* гамильтониана $H^0 \equiv H^{\mathcal{S}} + H^{\mathcal{B}}$, – линейная оболочка $d_{\rm mc}$ собственных векторов $H^0$, соответствующих последовательным собственным значениям.

## Определение.

Подпространство $\mathcal{H}_{\rm mc} \subset \mathcal{H}$, микроканоническое относительно *полного* гамильтониана $H \equiv H^{\mathcal{S}} + H^{\mathcal{B}} + H^{\mathcal{S}\mathcal{B}}$, – линейная оболочка $d_{\rm mc}$ собственных векторов $H$, соответствующих последовательным собственным значениям.

## Свойства $\mathcal{H}^0_{\rm mc}$ :

- $\langle \rho^{\mathcal{S}} \rangle_{\Psi \in \mathcal{H}^0_{\rm mc}} = d^{-1}_{\rm mc} {\rm tr}_{\mathcal{B}} \mathbf{1}_{\mathcal{H}^0_{\rm mc}} = Z^{-1} \exp(-\beta H^{\mathcal{S}})$;

# Квантовая почти-эргодичность

## Определение.

Подпространство $\mathcal{H}^0_{\mathrm{mc}} \subset \mathcal{H}$, микроканоническое относительно *невозмущенного* гамильтониана $H^0 \equiv H^{\mathcal{S}} + H^{\mathcal{B}}$, – линейная оболочка $d_{\mathrm{mc}}$ собственных векторов $H^0$, соответствующих последовательным собственным значениям.

## Определение.

Подпространство $\mathcal{H}_{\mathrm{mc}} \subset \mathcal{H}$, микроканоническое относительно *полного* гамильтониана $H \equiv H^{\mathcal{S}} + H^{\mathcal{B}} + H^{\mathcal{SB}}$, – линейная оболочка $d_{\mathrm{mc}}$ собственных векторов $H$, соответствующих последовательным собственным значениям.

## Свойства $\mathcal{H}^0_{\mathrm{mc}}$ :

- $\langle \rho^{\mathcal{S}} \rangle_{\Psi \in \mathcal{H}^0_{\mathrm{mc}}} = d_{\mathrm{mc}}^{-1} \mathrm{tr}_{\mathcal{B}} \mathbf{1}_{\mathcal{H}^0_{\mathrm{mc}}} = Z^{-1} \exp(-\beta H^{\mathcal{S}})$;
- в $\mathcal{H}^0_{\mathrm{mc}}$ можно построить базис из факторизованных векторов.

# Квантовая почти-эргодичность

**Теорема 7 (von Neumann, 1929; Linden *et al.*, 2008; Gogolin, 2010).**

Пусть гамильтониан составной системы невырожден. Для подавляющего большинства *начальных* состояний $\Psi(0)$ из микроканонического подпространства $\mathcal{H}_{\mathrm{mc}}$ усредненная по времени матрица плотности $\overline{\rho^{\mathcal{S}}}$ почти не отличима от микроканонической матрицы плотности $\rho^{\mathcal{S}}_{\mathrm{mc}} = d_{\mathrm{mc}}^{-1}\mathrm{tr}_{\mathcal{B}}\mathbf{1}_{\mathcal{H}_{\mathrm{mc}}}$. Точнее,

(i)

$$\left\langle ||\overline{\rho^{\mathcal{S}}} - \rho^{\mathcal{S}}_{\mathrm{mc}}|| \right\rangle_{\Psi(0)\in\mathcal{H}_{\mathrm{mc}}} \leq \frac{d_{\mathcal{S}}}{\sqrt{d_{\mathrm{mc}}}};$$

(ii) для $\eta$-почти всех $\Psi \in \mathcal{H}_{\mathrm{mc}}$

$$||\overline{\rho^{\mathcal{S}}} - \rho^{\mathcal{S}}_{\mathrm{mc}}|| \leq \frac{d_{\mathcal{S}}}{\sqrt{d_{\mathrm{mc}}}} + \epsilon,$$

где $\eta = 2e^{-cd_{\mathrm{mc}}\epsilon^2}$, $c \equiv 1/(18\pi^3)$.

# Квантовая почти-эргодичность

## Ложка дегтя

К сожалению, в реальности нас интересует не $\mathcal{H}_{\mathrm{mc}}$, а $\mathcal{H}^0_{\mathrm{mc}}$.

# Квантовая почти-эргодичность

## Ложка дегтя

К сожалению, в реальности нас интересует не $\mathcal{H}_{\mathrm{mc}}$, а $\mathcal{H}^0_{\mathrm{mc}}$.

Действительно, в $\mathcal{H}_{\mathrm{mc}}$ может вообще не быть ни одного факторизованного вектора, и мы ничего не узнаем о термализации факторизованного начального состояния.

# Квантовая почти-эргодичность

## Ложка дегтя

К сожалению, в реальности нас интересует не $\mathcal{H}_{\mathrm{mc}}$, а $\mathcal{H}^0_{\mathrm{mc}}$.

Действительно, в $\mathcal{H}_{\mathrm{mc}}$ может вообще не быть ни одного факторизованного вектора, и мы ничего не узнаем о термализации факторизованного начального состояния.

Кроме того, гипотеза о том, что при слабом взаимодействии

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{B}} \mathbf{1}_{\mathcal{H}_{\mathrm{mc}}} \simeq \mathrm{tr}_{\mathcal{B}} \mathbf{1}_{\mathcal{H}^0_{\mathrm{mc}}},$$

и, следовательно,

$$\rho^{\mathcal{S}}_{\mathrm{mc}} \simeq Z^{-1} \exp(-\beta H^{\mathcal{S}}),$$

правдоподобна, но не доказана.

# Литература

J. M. Deutsch, "Quantum statistical mechanics in a closed system", Phys. Rev. A **43**, 2046 (1991).

M. Srednicki, "Chaos and quantum thermalization", Phys. Rev. E **50**, 888 (1994).

M. Rigol, V. Dunjko and M. Olshanii, "Thermalization and its mechanism for generic isolated quantum systems", Nature **452**, 854 (2008); arXiv:0708.1324.

S. Popescu, A.J. Short and A. Winter, "Entanglement and the foundations of statistical mechanics", Nature Phys. **2**, 754 (2006); extended version: quant-ph/0511225.

N. Linden, S. Popescu, A. J. Short and A. Winter, "Quantum mechanical evolution towards thermal equilibrium", Phys. Rev. E **79**, 061103 (2009).

O. Lychkovskiy, "A necessary condition for the thermalization of a quantum system coupled to a quantum bath", arXiv:0903.2309

Спасибо за внимание!

Для создания презентации использовался TeX-образец, созданный Т. С. Синяк и Е. А. Максименко.